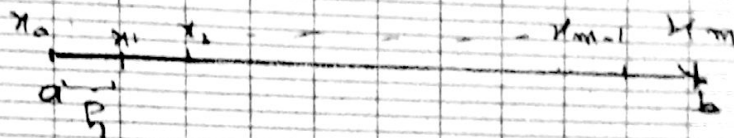


$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

Série 3

Exercice 3

1/ $f(x)$ CD sur $[a, b]$



On subdivise $[a, b]$ en m intervalles égaux
[maillage uniforme]

$$h = \frac{b-a}{m}$$

2/ $x_i = a + ih$ car:

$$h = x_i - x_{i-1} \Rightarrow x_i = x_{i-1} + h$$

$$x_i = x_{i-2} + 2h = x_{i-3} + 3h$$

$$\dots x_{0,i-1} + ih = a + ih$$

vérif :

$$x_m = a + mh = a + m \cdot \frac{b-a}{m} = b$$

Développement de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i$$

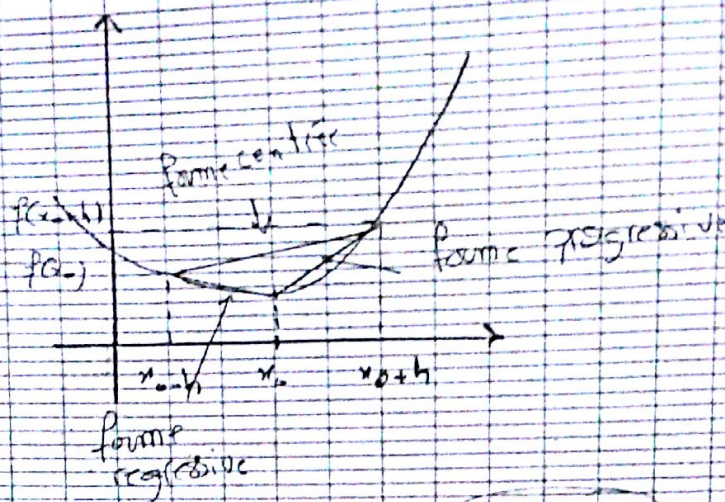
image
Pente

concavité
(Parabole)

et dans notre cas forme Progressive:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = x_i \\ x = x_i + h \\ x - x_0 = h \end{array} \right\} f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + o(h^3)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$



forme régressive

$$f(x, -h) = f(x) - f'(x) \cdot h$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

forme centrale

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h \end{aligned}$$

$$2f'(x) \cdot h = f(x+h) - f(x-h)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Pour déterminer l'erreur:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\alpha)}{2}h^2 \quad \alpha \in [x, x+h]$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\alpha)}{2}h^2 - f(x)}{h}$$

$$E = \max \left(\frac{f''(\alpha)}{2} h \right)$$

△

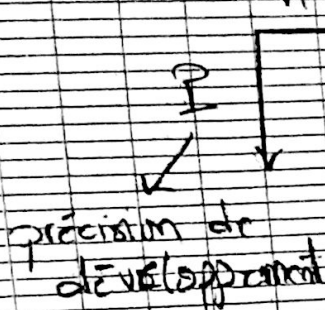
Pour avoir
la forme la
plus précise
en calcul

l'erreur de
chaque
calcul
composé

$$\begin{cases} f' = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\ E = \frac{f''(\alpha)}{2} h \end{cases}$$

4) $f(x) \approx$ d'ordre $2 = p$

Formule centrée
n ordre de la dérivée

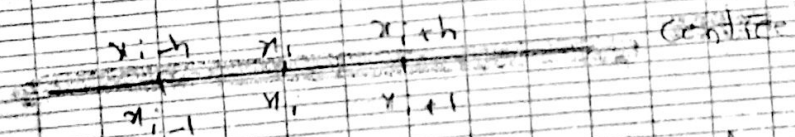
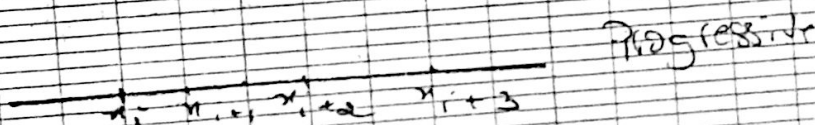


$f(x) \rightarrow$ d'ordre 1 $\Rightarrow$ 2 points
 $f(x) \rightarrow$ d'ordre 2 $\Rightarrow$ 3 points
 $f(x) \rightarrow$ d'ordre $n \Rightarrow n+1$ points
 $f(x) \rightarrow \dots \rightarrow p \Rightarrow n+p$ points

$n=2$ $f(x)$ d'un ordre de précision $p=2$

$n+p = 4$ points
 la Parité Pour la Formule centrée

Stencil :



Pour la forme centrée, le nombre de points doit être impair. On va utiliser 3 points au lieu de 4.

- 1/ stencil pour les $n+p$ points.
- 2/ Calcul le dev de Taylor pour les $n+p$ points
- 3/ Une combinaison linéaire des $f(x_{i+j})$
- 4/ Déterminer les coefficients

Régressive:

$$f(x_i - h) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2} h^2$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + \frac{f''(x_i)}{2} h$$

$$E_r = \max \left(\left| \frac{f''(x_i)}{2} h \right| \right)$$

Centrée :

$$x \in [x_i, x_i + h] \quad f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2} h^2$$

$$x \in [x_i - h, x_i] \quad f(x_i - h) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2} h^2$$

$$f(x_i + h) - f(x_i - h) = 2f'(x_i)h$$

$$\bullet f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2} h^2 + \frac{f'''(x_i)}{6} h^3$$

$$\bullet f(x_i - h) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2} h^2 - \frac{f'''(x_i)}{6} h^3$$

$$f(x_i + h) - f(x_i - h) = 2f'(x_i)h + \frac{f'''(x_i)}{6} h^3$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} - \frac{f'''(x_i)}{6} h^2$$

$$E_c = \max \left(\left| \frac{f'''(x_i)}{6} h^2 \right| \right)$$

L'erreur commise en faisant une approximation par la forme centrée varie en h^2 . Elle est plus petite que pour les formes progressives et régressives en h .

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad x \in [-1, 1]$$

$$1^\circ \quad f^0(x) = f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f^1(x) = f'(x) = \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f^2(x) = f''(x) = -\frac{1}{4} (1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f^0(0) = 1, \quad f^1(0) = \frac{1}{2}, \quad f^2(0) = -\frac{1}{4}$$

2/ Formule progressive

$$3^\circ \quad f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \underbrace{\frac{f''(x_i)h^2}{2}}_{\text{l'erreur}} \quad x \in [x_i, x_i + h]$$

$$x_i = 0$$

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2}$$

$$f'(0) = \frac{f(h) - f(0)}{h} - \frac{f''(0)h}{2}$$

$$f'(0) = v_p + \text{Erp}$$

$$v_p = \frac{f(0,1) - f(0)}{0,1} = \frac{\sqrt{1,1} - 1}{0,1} = 0,488$$

$$\text{Erp} = \max_{x \in [0,0,1]} \left| \frac{f''(x)}{2} \right| h$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4} (1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

Pour avoir est-ce qu'il p
est croissante.

$$f^{(2)}(x) = -\frac{3}{8} (1+x)^{-\frac{5}{2}} > 0$$

$f^{(2)}(x)$ est croissante
 $f^{(2)} < 0$

$$\text{Erp} = \left| \frac{f^{(2)}(0)}{2} \right| h$$

$$\text{Erp} = \frac{1}{4} \cdot \frac{0,1}{2} = 0,0125$$



$$a_- f(x, -h) = f(x, 1) - f'(x, 1)h + \frac{f''(x, 1)}{2} h^2$$

$$a_0 f(x, 1) = f(x, 1)$$

$$a_+ f(x, +h) = f(x, 1) + f'(x, 1)h + \frac{f''(x, 1)}{2} h^2$$

$$a_- f(x, -h) + a_0 f(x, 1) + a_+ f(x, +h) = \underbrace{(a_- + a_0 + a_+)}_0 f(x, 1) + \underbrace{(-a_- + a_+)}_0 f'(x, 1)h + \underbrace{(a_- + a_+)}_1 \frac{f''(x, 1)}{2} h^2$$

$$= a_- + a_+ = 0 \Rightarrow a_+ = -a_-$$

$$a_+ + a_- = 1 \Rightarrow a_+ = a_- = \frac{1}{2}$$

$$a_- + a_0 + a_+ = 0 \Rightarrow a_0 = -1$$

On essa
de limiter
car on a
besoin
1'ordre

$$\frac{1}{2} f(x, -h) - f(x, 1) + \frac{1}{2} f(x, +h) = \frac{f''(x, 1)}{2} h^2$$

$$f''(x, 1) = \frac{f(x, +h) - 2f(x, 1) + f(x, -h)}{h^2}$$

$$p^{(3)}(x) = \frac{3}{8} (1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$p^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} (1+x)^{-\frac{5}{2}} < 0$$

$p^{(3)}(x)$ décroissante et > 0

$$E_{T_2} = \frac{[1 + |f^{(3)}(0)| + |f^{(3)}(-h)|] h^3}{12}$$

$$= \frac{(0,1)^3}{12} \cdot \frac{3}{8} \cdot (1 + (0,1)^{-\frac{3}{2}}) = 0,00072$$

$$p^4(0) = 0,0006 \pm 0,00072$$

Commenter: l'erreur est minimale par la formule centrée

→ la valeur de $f^4(0)$ est plus proche de la valeur exacte ($\frac{1}{2}$) par la formule centrée.

4°/ On calcule $p^4(0)$ à l'ordre de précision 2 par la méthode générale (formule progressive)

$$n=1, \quad p=2.$$

On a besoin de $n+p=3$ points.

Formule progressive:

1°/ Skelton:

$$\begin{array}{ccc} 0 & h & 2h \end{array}$$

$$2^0/ a_0: f(0) = f(0)$$

$$a_1: f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2$$

$$a_2: f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + \frac{4f''(0)}{2}h^2$$

donc. $f'(0) = V_R = E(R) = 0,488 \approx 0,49$

→ Formule régressives

$$f(R) = f(0) + f'(0)R + \frac{f''(0)}{2}R^2$$

$$f'(0) = \frac{f(0) - f(-R)}{R} + \frac{f''(0)}{2}R = V_R + E(R)$$

$$V_R = \frac{1 - \sqrt{1-0,1}}{0,1} = 0,113$$

$$E(R) = \max_{R \in [-0,1,0]} \frac{|f''(R)|R}{2} = \frac{|f''(-0,1)|R}{2} = \frac{0,1}{2} \cdot \frac{1}{4} (Lq1)$$

$$E(R) = 0,0146$$

$$f'(0) = 0,113 + 0,0146$$

→ Formule centrées

$$f(R) = f(0) + f'(0)R + \frac{f''(0)}{2}R^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}R^3 - 1$$

$$f'(R) = f'(0) + f''(0)R + \frac{f^{(3)}(0)}{2}R^2$$

$$f'(0) = \frac{f(R) - f(-R)}{2R} + \frac{[f^{(3)}(0) - f^{(3)}(R)]R^2}{2} = V_C + E_C$$

NB:

Vrai sur
l'axe ordonnée

$$\begin{cases} f'_C(0) = \frac{f(R) - f(-R)}{2R} = \frac{1}{2} \left[\frac{f(R) - f(0)}{R} + \frac{f(0) - f(-R)}{R} \right] \\ = \frac{1}{2} \left(f''(0) + f''(0) \right) = \end{cases}$$

$$V_C = \frac{1,01 - 1,01}{0,02} = 0,0006$$

$$E_C = \max_{\substack{\alpha \in [0,0,1] \\ R \in [0,1,0]}} \frac{|f^{(3)}(\alpha) + f^{(3)}(R)|R^2}{12} < \max_{\alpha \in [0,0,1]} |f^{(3)}(\alpha)| \max_{R \in [0,1,0]} |R|^2$$

Progressive $\Delta \uparrow$ Exercice 38

Progressive $\nabla \downarrow$

P. $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$

R. $\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$

C. $\delta f_n = f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})$

centre δ

$x \in [a, b]$

1/ calcul de $f^{(2)}$ à l'ordre de précision 1

Par la formule:

$$\nabla^n f_i = \nabla^{n-1} f_i - \nabla^{n-1} f_{i-1}$$

a/

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_i &= \nabla(\nabla f_i) \\ &= \nabla f_i - \nabla f_{i-1} \\ &= (f_i - f_{i-1}) - (f_{i-1} - f_{i-2}) \\ &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2} \end{aligned}$$

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{\nabla^2 f(x_i)}{h^2}$$

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$$

voir page 6

b/ $f^{(3)}(x_i) = \frac{\nabla^3 f(x_i)}{h^3}$

$$\begin{aligned} \nabla^3 f(x_i) &= \nabla(\nabla^2 f(x_i)) \\ &= \nabla(f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}) \\ &= (f_i - 2f_{i-1}) - (f_{i-1} - 2f_{i-2}) \\ &\quad + (f_{i-2} - f_{i-3}) \\ &= f_i - 2f_{i-1} - f_{i-1} + 2f_{i-2} + f_{i-2} - f_{i-3} \\ &= f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3} \end{aligned}$$

$$3/ \quad a_0 f(0) + a_1 f(h) + a_2 f(2h) = \underbrace{(a_0 + a_1 + a_2)}_0 f(0) + \underbrace{(a_1 + 2a_2)}_0 f(h) + \underbrace{(a_1 + 4a_2)}_0 f(2h)$$

$$4/ \quad \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 1 \\ a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{a_1 + 2a_2}_1 + a_2 = 0$$

$$2a_2 = -1 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$a_1 - 1 = 1 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$a_0 = -(a_1 + a_2) = -(2 - \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$$

$$f'(0)h = -\frac{3}{2} f(0) + 2 f(h) - \frac{1}{2} f(2h)$$

$$f'(0) = -\frac{3}{2} f(0) + 2 f(h) - \frac{1}{2} f(2h)$$

$$f'(0) = -\frac{3 \times 1}{2} + 2 \times \sqrt{1.1} - \frac{1}{2} \times 1 = \sqrt{1.1} = 0.498$$

5/ comparer la valeur obtenue ds (4) avec celle d

Or dfo 1			Or dfo 2
FP	FR	FC	FR
0.498	0.113	0.1205 0.0005	0.498 0.0005

la formule centrée d'ordre 1 est plus précise
la formule progressive d'ordre 2 (résultat)

Etape 3: combinaisons linéaires

$$a_{-2} f(x_i - 2h) + a_{-1} f(x_i - h) + a_0 f(x_i) + a_1 f(x_i + h) + a_2 f(x_i + 2h)$$

$$= (a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2) f(x_i) + (-2a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 2a_2) f'(x_i) h$$

$$+ (4a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 4a_2) \frac{f''(x_i) h^2}{2} + (-8a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 8a_2) \frac{f'''(x_i) h^3}{6}$$

$$+ (16a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 16a_2) \frac{f^{(4)}(x_i) h^4}{24}$$

Etape 4: Détermination des coefficients

$$\begin{cases} a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ -2a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 2a_2 = 0 \\ 4a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 4a_2 = 0 \\ 8a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 8a_2 = 1 \\ 16a_{-2} + a_{-1} + a_1 + 16a_2 = 0 \end{cases}$$

Remarque:

- les coef de $f(x_i)$ est $\neq 0$

- a_0 est seulement dans une seule équation.

$\Rightarrow$ 1 équation $\neq$ syst 5×4

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ -8 & 1 & 1 & 8 \\ 16 & 1 & 1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-2} \\ a_{-1} \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AX = b$$

$$f^{(3)}(x_i) = \frac{f_{i-3} - 3f_{i-2} + 3f_{i-1} - f_i}{h^3}$$

l'asymétrie de cette formule vient de:

$$\Delta f(x+h) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(x + (n-k)h)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dans la
forme antérieure

2) calcul de $f^{(3)}$ à l'ordre de précision 2.

Par la formule générale centrée.

lorsque
 $P+Q = \text{nbr}$
de points par
je discute
un point

4 étapes:

étape 1: $k=3$, $P=2$
 $k+P=5$ points.

Stencil 0

$$x_{i-2} \quad x_{i-1} \quad x_i \quad x_{i+1} \quad x_{i+2}$$

voir page 3

l'arrête
d'ordre 4
 $P+Q=1$

étape 2:

$$R+P=1$$

$$a_{-2} \rightarrow f(x_{i-2}h) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} - \frac{f^{(3)}(x_i)h^3}{6} + \frac{f^{(4)}(x_i)h^4}{24}$$

$$a_{-1} \rightarrow f(x_{i-1}h) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} - \frac{f^{(3)}(x_i)h^3}{6} + \frac{f^{(4)}(x_i)h^4}{24}$$

$$a_0 \rightarrow f(x_i) = f(x_i)$$

$$a_1 \rightarrow f(x_{i+1}h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} + \frac{f^{(3)}(x_i)h^3}{6} + \frac{f^{(4)}(x_i)h^4}{24}$$

$$a_2 \rightarrow f(x_{i+2}h) = f(x_i) + 2f'(x_i)h + 2\frac{f''(x_i)h^2}{2} + \frac{4f^{(3)}(x_i)h^3}{6} + \frac{2f^{(4)}(x_i)h^4}{24}$$

combination: $\rightarrow$

$$\frac{f^{(3)}(x_i) h^3}{6} = \frac{1}{12} f(x_i - 2h) + \frac{1}{6} f(x_i - h) - \frac{1}{6} f(x_i + h) - \frac{1}{12} f(x_i + 2h)$$

$$f^{(3)}(x_i) = \frac{f(x_i - 2h) + 2f(x_i - h) - 2f(x_i + h) - f(x_i + 2h)}{2h^3}$$

utiliser la méthode d'élimination de Gauss
la matrice augmentée.

$$A/b = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ -8 & -1 & 1 & 8 & 1 \\ +16 & 1 & 1 & 16 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 = L_3 + 4L_1 \\ L_4 = L_4 + 8L_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 9 & 32 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + 3L_2 \\ L_4 - 7L_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -24 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ L_4 + 2L_3 \end{array}$$

$$24a_3 = 2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{12}$$

$$6a_1 + 24a_3 = 1 \rightarrow a_1 = -\frac{1}{6}$$

$$-a_1 + 3a_1 + 8a_3 = 0 \rightarrow a_1 = \frac{1}{6}$$

$$-2a_2 - a_1 + a_1 + 2a_3 = 0 \rightarrow a_2 = -\frac{1}{12}$$

$$a_0 = -a_2 - a_1 - a_1 - a_3$$

$$a_0 = -\frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 0$$

$$= \dots = (1-h)^{n+1} y_0$$

$$y_0 = y(0) = 1$$

$$y_{n+1} = (1-h)^{n+1}$$

suite géométrique
de raison $(1-h)$

$$y_{n+1} = r^{n+1}$$

1) $0 < r < 1$ convergente

2) $-1 < r < 0$ convergente oscillante

3) $|r| > 1$ diverge

4) $|r| = 0$ ou $|r| = 1 \Rightarrow$ stationnaire

Pour que la méthode soit convergente

$$0 < 1-h < 1 \Rightarrow 1-h < 1 \Rightarrow h > 0$$

$$1-h > 0 \Rightarrow h < 1$$

$$h \in]0, 1[$$

la seule valeur de h qui satisfait
à ce critère est $h = 0,1$